

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Основы эргодической теории
<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра анализа систем и решений
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: А.А. Шананин, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой

Программа обсуждена на заседании кафедры анализа систем и решений 03.02.2025

## Аннотация

Курс "Основы эргодической теории" заключается в том, чтобы предоставить студентам фундаментальные знания и навыки в области эргодической теории, которая является важной ветвью математики, изучающей динамические системы и их долгосрочные статистические свойства. Курс содержит понимание основных понятий, изучение теорем и результатов, применение методов и связь с другими областями математики.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Познакомить слушателей с математическим аппаратом и с основными моделями эргодической теории.

#### Задачи дисциплины

- ознакомление с теорией динамических систем.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Формулирует в рамках обозначенной проблемы, цель, задачи, актуальность, значимость (научную, практическую, методическую и иную в зависимости от типа проекта), ожидаемые результаты и возможные сферы их применения
	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
	УК-2.3 Способен организовать и координировать работу участников проекта, обеспечивать работу команды необходимыми ресурсами
	УК-2.4 Представляет публично результаты проекта (или отдельных его этапов) в форме отчетов, статей, выступлений на научно-практических конференциях, семинарах и т.п.
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области информатики и вычислительной техники	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области информатики и вычислительной техники
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области информатики и вычислительной техники и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результатов и предложить варианты	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов

анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области математики, естественных наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.4 Способен анализировать профессиональную информацию, выделять в ней главное, структурировать, оформлять и представлять в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями
ОПК-5 Способен и готов к профессиональному росту и руководству коллективом в области информатики и вычислительной техники, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	ОПК-5.1 Способен работать в коллективе, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия
	ОПК-5.2 Владеет навыком руководства малым коллективом в сфере своей профессиональной деятельности
	ОПК-5.3 Стремится к получению новых знаний, профессиональному и личностному росту
	ОПК-5.4 Способен осуществлять эффективное управление разработкой программных средств и проектов
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные модели и теоремы теории динамических систем.

уметь:

- понять поставленную задачу и провести ее формализацию;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждения;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач теории динамических систем;
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач;
- навыками освоения большого объема информации.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Введение.	3	3		4
2	Временные и пространственные средние.	3	3		4
3	Максимальная эргодическая теорема.	3	3		4
4	Определение и свойства энтропии разбиения.	2	2		4
5	Перемешивание. Связь с эргодичностью.	3	3		4
6	Понятие изоморфизма абстрактных динамических систем.	2	3		4
7	Свойства собственных чисел и собственных функций эргодических преобразований.	3	3		4
8	Сдвиги на окружности. Теорема Боля-Серпинского-Вейля.	3	2		6
9	Статистическая эргодическая теорема.	2	2		4
10	Теорема Боголюбова-Крылова.	3	3		4
11	Эргодичность динамических систем с непрерывным временем.	3	3		3
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

###### 1. Введение.

Модели популяций с неперекрывающимися поколениями. Теорема Лиувилля об инвариантной мере. Движение заряженной частицы в стационарном электромагнитном поле. Магнитная гидродинамика. Гамильтоновы системы. Отображение Гаусса.

###### 2. Временные и пространственные средние.

Временные и пространственные средние. Эргодичность. Сдвиги на торе. Теорема о всюду плотных траекториях. Теорема Вейля-фон Неймана. Теорема Кронекера – Вейля.

### 3. Максимальная эргодическая теорема.

Максимальная эргодическая теорема. Теорема Биркгофа-Хинчина.

### 4. Определение и свойства энтропии разбиения.

Определение и свойства энтропии разбиения. Энтропия динамических систем. Инвариантность энтропии при изоморфизме динамических систем. Теорема Колмогорова. Примеры: энтропия сдвига на окружности, энтропия сдвига Бернулли, энтропия линейного автоморфизма.

### 5. Перемешивание. Связь с эргодичностью.

Перемешивание. Связь с эргодичностью. Лебеговские спектры. Примеры. Слабое перемешивание.

### 6. Понятие изоморфизма абстрактных динамических систем.

Понятие изоморфизма абстрактных динамических систем. Изоморфизм преобразования пекаря и схемы Бернулли. Изоморфизм схем Бернулли.

### 7. Свойства собственных чисел и собственных функций эргодических преобразований.

Свойства собственных чисел и собственных функций эргодических преобразований. Динамические системы с чисто точечным спектром. Теорема фон Неймана-Халмоша.

### 8. Сдвиги на окружности. Теорема Боля-Серпинского-Вейля.

Сдвиги на окружности. Теорема Боля-Серпинского-Вейля. Строгая эргодичность сдвига на иррациональный угол. Распределение первых цифр в десятичной записи чисел  $2$  в степени  $n$ .

### 9. Статистическая эргодическая теорема.

Статистическая эргодическая теорема.

### 10. Теорема Боголюбова-Крылова.

Теорема Боголюбова-Крылова. Понятие абстрактной динамической системы. Теорема Пуанкаре о возвращении.

### 11. Эргодичность динамических систем с непрерывным временем.

Эргодичность динамических систем с непрерывным временем. Задача Лагранжа о среднем движении перигелия.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Необходимое оборудование для практических занятий: компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, маркерная доска).

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Динамика стохастических систем [Текст] : курс лекций / В. И. Кляцкин .— Научное изд. — М. : Физматлит, 2003 .— 240 с.

#### Дополнительная литература

1. Вычислительные методы для анализа моделей сложных динамических систем [Текст]. Ч.1 : учеб.пособие для вузов / А.И.Лобанов, И.Б.Петров; М-во образования РФ, МФТИ. — М. : Изд-во МФТИ, 2000. — 168 с.

#### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

#### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Не предусмотрено.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- подготовку к экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.

Литература для самостоятельной работы:

1. Каток А.Б., Хассельблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. - М.: Факториал, 1999, 767 с.
2. Халмош П.Р. Лекции по эргодической теории. Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 1999, 134 с.
3. Арнольд В.И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики. Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 1999, 282 с.
4. Синай Я.Г. Введение в эргодическую теорию. - М.: Фазис, 1996, 128 с.
5. Синай Я.Г. Современные проблемы эргодической теории. - М.: Физ. Мат. Лит., 1995, 201 с.
6. Синай Я.Г., Корнфельд И.П., Фомин С.В. Эргодическая теория. - М.: Наука, 1980, 283 с.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра анализа систем и решений
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

**Разработчик:** А.А. Шананин, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Формулирует в рамках обозначенной проблемы, цель, задачи, актуальность, значимость (научную, практическую, методическую и иную в зависимости от типа проекта), ожидаемые результаты и возможные сферы их применения
	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
	УК-2.3 Способен организовать и координировать работу участников проекта, обеспечивать работу команды необходимыми ресурсами
	УК-2.4 Представляет публично результаты проекта (или отдельных его этапов) в форме отчетов, статей, выступлений на научно-практических конференциях, семинарах и т.п.
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области информатики и вычислительной техники	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области информатики и вычислительной техники
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области информатики и вычислительной техники и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области математики, естественных наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.4 Способен анализировать профессиональную информацию, выделять в ней главное, структурировать, оформлять и представлять в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями
ОПК-5 Способен и готов к профессиональному росту и руководству коллективом в области информатики и вычислительной техники, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	ОПК-5.1 Способен работать в коллективе, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия
	ОПК-5.2 Владеет навыком руководства малым коллективом в сфере своей профессиональной деятельности
	ОПК-5.3 Стремится к получению новых знаний, профессиональному и личностному росту
	ОПК-5.4 Способен осуществлять эффективное управление разработкой программных средств и проектов



ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Основы эргодической теории» обучающийся должен:

### знать:

- основные модели и теоремы теории динамических систем.

### уметь:

- понять поставленную задачу и провести ее формализацию;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждения;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов.

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач теории динамических систем;
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач;
- навыками освоения большого объема информации.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Модели популяций с неперекрывающимися поколениями. Теорема Лиувилля об инвариантной мере.
2. Движение заряженной частицы в стационарном электромагнитном поле. Магнитная гидродинамика. Гамильтоновы системы. Отображение Гаусса.
3. Теорема Боголюбова-Крылова.
4. Понятие абстрактной динамической системы. Теорема Пуанкаре о возвращении.

5. Статистическая эргодическая теорема.
6. Максимальная эргодическая теорема.
7. Теорема Биркгофа-Хинчина.
8. Временные и пространственные средние. Эргодичность. Сдвиги на торе. Теорема о всюду плотных траекториях.
9. Теорема Вейля-фон Неймана. Теорема Кронекера – Вейля.
10. Сдвиги на окружности. Теорема Боля-Серпинского-Вейля.
11. Строгая эргодичность сдвига на иррациональный угол. Распределение первых цифр в десятичной записи чисел .
12. Эргодичность динамических систем с непрерывным временем.
13. Задача Лагранжа о среднем движении перигелия.
14. Перемешивание. Связь с эргодичностью. Лебеговские спектры. Примеры. Слабое перемешивание.
15. Понятие изоморфизма абстрактных динамических систем. Изоморфизм преобразования пекаря и схемы Бернулли
16. Свойства собственных чисел и собственных функций эргодических преобразований.
17. Динамические системы с чисто точечным спектром. Теорема фон Неймана-Халмоша.
18. Определение и свойства энтропии разбиения. Энтропия динамических систем. Инвариантность энтропии при изоморфизме динамических систем. Теорема Колмогорова.
19. Примеры: энтропия сдвига на окружности, энтропия сдвига Бернулли, энтропия линейного автоморфизма.

Примеры экзаменационных билетов:

Билет №1

1. Теорема Боголюбова-Крылова.
2. Свойства собственных чисел и собственных функций эргодических преобразований.

Билет № 2

1. Динамические системы с чисто точечным спектром. Теорема фон Неймана-Халмоша.
2. Эргодичность динамических систем с непрерывным временем.

#### Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций.

Экзамен проводится в устной форме в виде ответов на вопросы билетов.